Printed Pages – 14

I-207

B.Sc. (Part-II) Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper - III

(Mechanics)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से दो भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt all five questions. Two parts from each unit are compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) लॉमी प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the Lami's theorem.

(b) 2a लम्बाई की एक भारी समांग छड़ के दोनों सिरे दो चिकने समतलों के सम्पर्क में रखे गये हैं जिनका क्षैतिज से झुकाव α और β ($\beta > \alpha$) है। यदि साम्य की स्थिति में छड़ का क्षैतिज से झुकाव θ हो, तो कल्पित कार्य के सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए :

$$\tan\theta = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \cot\beta)$$

A heavy uniform rod of length 2a, rests with its ends in contact with two smooth inclined planes of inclination α and β ($\beta > \alpha$) to the horizon. If θ be the inclination of the rod to the horizon, prove by the principle of virtual work, that :

$$\tan\theta = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \cot\beta)$$

(c) एक समांग चेन एक ही स्तर पर स्थित दो बिन्दुओं, जिनके बीच की दूरी 2a है, से लटकाया गया है। यदि z मध्य में झोल हो, तो दर्शाइए कि

$$z = c\left[\cosh\left(\frac{a}{c}\right) - 1\right]$$

यदि z, a की तुलना में छोटा हो, तो दर्शाइए कि :

$2cz = a^2$ (लगभग)

A uniform chain is hung up from two points at the same level and distance 2a apart. If z is the sag at the middle, show that :

$$z = c\left[\cosh\left(\frac{a}{c}\right) - 1\right]$$

If z be small compared to a, show that :

$2cz = a^2$ nearly.

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) एक बल P, X-अक्ष के अनुदिश क्रिया करता है और एक अन्य बल nP बेलन $x^2 + y^2 = a^2$ के एक जनक के अनुदिश क्रिया करता है, तब दर्शाइए कि केन्द्रीय अक्ष बेलन :

$$n^2(nx - z)^2 + (1 + n^2)^2y^2 = n^4a^2$$

पर स्थित है।

A force P acts along the axis of X and another force np along a generator of the cylinder $x^2 + y^2 = a^2$; show that the central axis lies on the cylinder :

$$n^2(nx - z)^2 + (1 + n^2)^2y^2 = n^4a^2.$$

(b) यदि P तथा Q दो अप्रतिच्छेदी बल हैं, जिनकी दिशाएँ लम्बवत् हैं, तो दर्शाइए कि केन्द्रीय अक्ष से उनकी क्रिया रेखाओं की दूरियों का अनुपात $Q^2 : P^2$ है।

If P and Q be two non-intersecting forces whose direction are perpendicular, show that the ratio of distance of the central axis from their lines of action are $Q^2 : P^2$

(c) निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए :

(i) केन्द्रीय अक्ष

(ii) शून्य रेखाएँ

Define the following :

(i) Central axis

(ii) Null lines

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) चिकनी मेज पर दो बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाली रेखा में m द्रव्यमान का एक कण सरल आवर्त गति में गतिमान है और इन बिन्दुओं में यह प्रत्यास्थ डोरियों से बँधा है जिनका साम्यावस्था में प्रत्येक का तनाव T है। दर्शाइए कि दोलन का समय $2\pi\sqrt{\frac{mab}{T(a+b)}}$ होगा, जहाँ a तथा b डोरियों की प्राकृतिक लम्बाइयों के ऊपर उनके विस्तार हैं।

A particle of mass m executes simple harmonic motion in the line joining the points A and B on the smooth table and is

connected with these points by elastic strings whose tensions in equilibrium are T. Show that the time of an oscillation is $2\pi\sqrt{\frac{mab}{T(a+b)}}$, where a, b are the extensions of the strings beyond their natural lengths.

(b) एक कण h ऊँचाई की मीनार के शिखर से क्षैतिज में $\sqrt{2gh}$ के वेग से फेंका गया तो मीनार की जड़ से उस बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए जहाँ कण भूमि पर आघात करता है। उड्डयन काल तथा आघात करते समय का वेग भी ज्ञात कीजिए।

A particle is thrown horizontally with velocity $\sqrt{2gh}$, from the top of a tower of height h. Find where it will strike the level ground through the foot of the tower. Find the time of flight and also find its striking velocity.

(c) एक समतल में गतिमान एक कण का त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ वेग व त्वरण ज्ञात कीजिए।

Find the radial and transverse velocity and acceleration for a particle moving in a plane.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) केपलर के ग्रहीय गति के नियम लिखिए। निगमन कीजिए कि परिक्रमण काल का वर्ग दीर्घ वृत्ताकार कक्ष की अर्द्ध दीर्घाक्ष के घन का समानुपाती होता है।

Write the Kepler's laws of motion of planets. Deduce the square of the periodic time varies as the cube of the semi-major axis.

(b) समरूप वेग ν से एक बिन्दु चक्रज $S = 4a \sin\psi$ बनाता है। किसी बिन्दु पर इसका त्वरण ज्ञात कीजिए।

A point describes the cycloid $S = 4a \sin\psi$ with uniform speed ν. Find its acceleration at any point.

(c) m द्रव्यमान का एक छोटा छल्ला एक चिकने वृत्ताकार तार पर गति करता है। इस पर केन्द्र से b दूरी पर वृत्त के अन्दर एक केन्द्रीय आकर्षण $\frac{m\mu}{(\text{दूरी})^2}$ बल क्रिया कर रहा है।

दर्शाइए कि छल्ला वृत्त की पूरी परिक्रमा कर सके, इसके लिये बल केन्द्र से निकटतम तार के बिन्दु पर वेग :

$$\sqrt{\frac{4\mu b}{(a^2 - b^2)}}$$

से कम नहीं होना चाहिए।

A small bead, of mass m, moves on a smooth circular wire being acted upon by a central attraction $\sqrt{\frac{m\mu}{(\text{distance})^2}}$ to a point within the circle stituated at a distance b from the centre. Show that, in order that the bead may move completely round the circle, its velocity at the point of the wire nearest the centre of force must not be less than :

$$\sqrt{\frac{4\mu b}{(a^2 - b^2)}}.$$

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) एक कण V वेग से एक चिकने क्षैतिज समतल पर ऐसे माध्यम में प्रक्षेपित किया जाता है, जिसकी प्रति इकाई संहति पर प्रतिरोध k(वेग) है। दर्शाइए कि t समय पश्चात् कण का वेग ν और इस समय पर चली गयी दूरी S निम्नांकित में दी जाती है :

$$\nu = V e^{-kt}$$

तथा $S = \frac{V}{k}(1 - e^{-kt})$

A particle is projected with velocity V along a smooth horizontal plane in a resisting motion whose resistance per unit mass is k (velocity). Show that the velocity ν after a

time t and the distance travelled S in that time are given by :

$$\nu = V e^{-kt}$$

and $S = \frac{V}{k}(1 - e^{-kt})$

(b) M द्रव्यमान का एक कण विराम में है और एक अचर बल F के अन्तर्गत एक निश्चित दिशा में चलना प्रारम्भ करता है। यह महीन धूलि की धारा, जो विपरीत दिशा में वेग ν से गतिमान है, के प्रतिरोध से सीधे टकराता है और अचर दर c से इसके ऊपर द्रव्य का जमाव करती है। दर्शाइये कि इसका द्रव्यमान M होगा, जब इसके द्वारा चलित दूरी :

$$\left(\frac{k}{c^2}\right)\left[m - M\left(1 + \log\frac{m}{M}\right)\right]$$

है, जहाँ $k = F - c\nu$.

A particle of mass M is at rest and begins to move under the action of a constant force F in a fixed direction. It encounters the resistance of a stream of fine dust moving in the opposite direction with velocity ν, which deposits matter on it at a constant rate c. Show that its mass will be m when it has travelled a distance :

$$\left(\frac{k}{c^2}\right)\left[m - M\left(1 + \log\frac{m}{M}\right)\right]$$

where $k = F - c\nu$.

(c) त्रिविमीय आयाम में गति करने वाले किसी कण का त्वरण कार्तीय निर्देशांक के पदों में ज्ञात कीजिए।

If a particle moves in three dimensions then find the acceleration of a particle in terms of cartesian coordinates.